Université Paris Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique
45 rue des Saints-Pères 75006 Paris
2010-2011

Probabilités 5

LICENCE L3

Feuille d'exercices n°2

Exercice 1 Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur l'intervalle $[0;2]$.

1. Déterminer la loi de $Z = X - Y$.
2. Déterminer la loi de $T = XY$.

Exercice 2 Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois exponentielles de paramètres respectifs $\lambda > 0$ et $\mu > 0$.

1. *(Partiel 2005)* On suppose dans cette question $\lambda = \mu$.
   (a) Donner une densité du couple (X, Y).
   (b) Quelle est la loi de la variable aléatoire $U = X/(X+Y)$?
   (c) Déterminer la loi du couple $(X, X+Y)$.

2. On ne suppose plus $\lambda = \mu$.
   (a) Déterminer une densité de la variable X^3.
   (b) Déterminer les lois des variables $\max(X^3, Y)$ et $\min(X^3, Y)$.

Exercice 3 Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur l'intervalle $[0;1]$.

1. Déterminer les lois des variables $Y = \min(X, 1-X)$ et $Z = \max(X, 1-X)$.
2. Calculer l'espérance de la variable aléatoire Y/Z (Indication : remarquer que $Z + Y = 1$). Montrer que la variable Z/Y n'a pas d'espérance.

Exercice 4 Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires admettant pour densité la fonction f définie par

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = k \exp\left\{-\left(x^2 - xy + \frac{y^2}{2}\right)\right\},$$

où k est une constante.

1. Déterminer la valeur de la constante k.
2. Déterminer les lois des variables X et Y. Sont-elles indépendantes ?

Exercice 5 *(Partiel 2008)* Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires ayant pour densité

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = \frac{1}{x} \mathbf{1}_{0 < y \leq x \leq 1}.$$

1. Vérifier que f est bien une densité de probabilité.
2. Déterminer les lois marginales.

3. X et Y sont-elles indépendantes ?
4. Déterminer la loi de $X+Y$.

Exercice 6 Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires ayant pour densité

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \;\; f(x,y) = \frac{1}{\pi} \mathbf{1}_{x^2+y^2 \leq 1}.$$

1. Vérifier que f est bien une densité de probabilité.
2. Déterminer les densités des lois de X et Y.
3. X et Y sont-elles indépendantes ?
4. On pose $Z = X^2 + Y^2$. Calculer la loi de la variable Z. Indication : penser au changement de variables en coordonnées polaires.

Exercice 7 Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \; ; \; 0 < x \leq y\}$ et soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = e^{-y} \mathbf{1}_D(x,y).$$

1. Vérifier que f est la densité d'un couple (X,Y) de variables aléatoires réelles.
2. Quelles sont les lois de X et de Y ?
3. X et Y sont-elles indépendantes ? X et $Y-X$ sont-elles indépendantes ?

Exercice 8 Soit (X,Y) un couple admettant pour densité

$$f(x,y) = \frac{1}{x^2 y^2} \, \mathbf{1}_{x \geq 1} \mathbf{1}_{y \geq 1}.$$

1. On définit les variables aléatoires $U = XY$ et $V = \dfrac{X}{Y}$. U et V sont-elles indépendantes ?
2. Calculer $\mathbb{E}(1/V\sqrt{U})$.

Exercice 9 *(Partiel 2006)* Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de lois respectives $\mathcal{E}(1/2)$ et $\gamma(2,2)$. On rappelle que la densité de la loi $\gamma(2,2)$ est $g : y \mapsto 4y \exp(-2y) \mathbf{1}_{y>0}$.

1. Déterminer la loi du couple (U,V) où $U = X+Y$ et $V = X/(X+Y)$.
2. Trouver les lois de U et V.
3. Ces variables sont-elles indépendantes ?