

Probabilités 5

Feuille d'exercices n°1 : Variables aléatoires à densité.

Exercice 1 *Calcul de lois : transformations de lois uniforme.*

1. Soit X une variable aléatoire qui suit une loi uniforme sur $[0; 1]$. Déterminer la loi de la variable $Y = aX + b$, avec $a, b \in \mathbb{R}$.
2. Soit X une variable aléatoire qui suit une loi uniforme sur $[-1; 3/2]$. Déterminer la loi de la variable $Y = X^2$.
3. Soit X une variable aléatoire qui suit une loi uniforme sur $[-1; 1]$. Déterminer la loi de la variable $Y = \exp\left(\frac{1}{X}\right)$.
4. Soit X une variable aléatoire qui suit une loi uniforme sur $[0; \pi]$. Déterminer la loi de la variable $Y = \sin(X)$.

Exercice 2 Soit a un réel et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie pour $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = a 2^{-x} \mathbf{1}_{x>0} + a 2^x \mathbf{1}_{x \leq 0}$.

1. Pour quelle valeur de a , f est-elle la densité d'une loi de probabilité d'une variable X ?
2. Donner la fonction de répartition de X .
3. Soit Y la variable aléatoire donnée par : $Y = 2^X$. Donner la fonction de répartition de Y et calculer l'espérance $\mathbb{E}(Y)$ si elle existe.

Exercice 3 Soit, pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = a x^2 e^{-\frac{x^2}{3}} \mathbf{1}_{x>0}$.

1. Déterminer a pour que f soit la densité d'une variable aléatoire X .
2. Donner la fonction de répartition F_X de X et déterminer la probabilité $\mathbb{P}(X > 1)$.
3. Calculer l'espérance $\mathbb{E}(X)$.

Exercice 4 Soit a un réel et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie pour $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = a (x - 2) \mathbf{1}_{]-1; 2]}(x)$.

1. Pour quelle valeur de a , f est-elle la densité d'une loi de probabilité d'une variable X ?
2. Soit Y la variable aléatoire donnée par : $Y = |X|$. Déterminer la loi de Y .

Exercice 5 Soit X une variable aléatoire de densité $f : x \mapsto \frac{x}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) \mathbf{1}_{\{x \geq 0\}}$, où σ désigne un réel strictement positif.

1. Calculer la probabilité $\mathbb{P}(-1 \leq X \leq 1)$.
2. Calculer l'espérance et la variance de X .
3. Calculer la loi des variables $U = X^2$ et $V = X^2 - 2$.

Exercice 6 *Loi de Laplace.* Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie, pour $x \in \mathbb{R}$, par $f(x) = k e^{-\frac{|x-\lambda|}{\mu}}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu > 0$.

1. Trouver la constante k pour que la fonction f soit la densité d'une loi de probabilité d'une variable X .
Donner la fonction de répartition de X .
2. On pose $Y = \frac{X - \lambda}{\mu}$. Donner la loi de Y appelée première loi de Laplace normalisée.
Calculer l'espérance et la variance de Y , en déduire celles de X .

Exercice 7 *Transformation de la loi de Cauchy.* Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Cauchy de densité $f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$ ($x \in \mathbb{R}$). Déterminer les lois des variables suivantes : $\frac{1}{X}$, $\frac{1+X}{1-X}$, X^2 et $\frac{1-X^2}{1+X^2}$.

Exercice 8 *Loi Gamma (premières propriétés).* On définit la fonction Gamma par

$$\Gamma : x \mapsto \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt.$$

et, pour deux paramètres $p, \theta > 0$, la fonction

$$f_{p,\theta} : t \mapsto \frac{\theta^p}{\Gamma(p)} e^{-\theta t} t^{p-1} \mathbf{1}_{t>0}.$$

1. (*Rappels sur la Fonction Gamma*)
 - (a) Justifier que la fonction Γ est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
 - (b) Montrer que $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, pour tout $x > 0$.
 - (c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\Gamma(n+1) = n!$.
2. (*Loi Gamma : premières propriétés*)
 - (a) Montrer que $f_{p,\theta}$ définit bien une densité d'une loi de probabilité sur $\mathbb{R}$. On l'appelle loi Gamma, notée $\gamma(p, \theta)$.
 - (b) Calculer l'espérance et la variance d'une variable aléatoire X suivant la loi $\gamma(p, \theta)$.
3. (*Liens avec la loi normale*) Soit Z une variable aléatoire $\mathcal{N}(0, 1)$. Calculer une densité de la variable Z^2 . Quelle est la loi de Z^2 ? Montrer aussi que $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

Exercice 9 *Loi de Pareto.* Soit X une variable aléatoire de loi de Pareto de paramètres $\alpha > 0$ et $\theta > 0$, de densité :

$$f : x \mapsto \frac{K(\alpha, \theta)}{x^{\alpha+1}} \mathbf{1}_{\theta; \infty[}(x),$$

où $K(\alpha, \theta)$ est une constante de normalisation.

1. Déterminer la constante $K(\alpha, \theta)$.
2. Déterminer la fonction de répartition de la variable X .
3. Calculer les moments de X lorsqu'ils sont finis. Donner sa variance, quand elle existe.
4. On pose $Y = \alpha \ln(X/\theta)$. Déterminer la loi de Y .
5. Soient $X_1, \dots, X_n$ n variables indépendantes de même loi de Pareto de paramètres α et θ . Trouver la loi de $Z = \min\{X_1, \dots, X_n\}$.