Université Paris Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique
45 rue des Saints-Pères 75006 Paris
2010-2011

Probabilités 5

LICENCE L3

Feuille d'exercices n°1

Exercice 1 *Calcul de lois.*

1. Soit X une variable aléatoire qui suit une loi uniforme sur $[0; 1]$. Déterminer la loi de la variable $Y = aX + b$, avec $a, b \in \mathbb{R}$.
2. Soit X une variable aléatoire qui suit une loi uniforme sur $[-1; 3/2]$. Déterminer la loi de la variable $Y = X^2$.
3. Soit X une variable aléatoire qui suit une loi uniforme sur $[-1; 1]$. Déterminer la loi de la variable $Y = \exp\left(\frac{1}{X}\right)$.

Exercice 2 *Loi de Laplace.* Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie, pour $x \in \mathbb{R}$, par $f(x) = k\, e^{-\frac{|x-\lambda|}{\mu}}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu > 0$.

1. Trouver la constante k pour que la fonction f soit la densité d'une loi de probabilité d'une variable X.
   Donner la fonction de répartition de X.
2. On pose $Y = \dfrac{X - \lambda}{\mu}$. Donner la loi de Y appelée première loi de Laplace normalisée.
   Calculer l'espérance et la variance de Y, en déduire celles de X.

Exercice 3 Soit a un réel et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie pour $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = a\,(x-2)\mathbf{1}_{]-1;2]}(x)$.

1. Pour quelle valeur de a, f est-elle la densité d'une loi de probabilité d'une variable X ?
2. Soit Y la variable aléatoire donnée par : $Y = |X|$. Déterminer la loi de Y.

Exercice 4 *Loi normale.* Soit X une variable aléatoire qui suit une loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

1. Quelle est la loi de la variable $aX + b$, $a, b \in \mathbb{R}$?
2. Calculer par récurrence les espérances $\mathbb{E}(X^n)$ pour un entier $n \geq 1$.
3. On pose $Y = e^{X+1}$. Déterminer une densité de Y et l' espérance de Y.
4. On pose $Z = X^2 + 2X$. Déterminer la loi de Z.

Exercice 5 Soit X une variable aléatoire de densité $f : x \mapsto \frac{x}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) \mathbf{1}_{\{x \geq 0\}}$, où σ désigne un réel strictement positif.

1. Calculer la probabilité $\mathbb{P}(-1 \leq X \leq 1)$.
2. Calculer l'espérance et la variance de X.
3. Calculer la loi des variables $U = X^2$ et $V = X^2 - 2$.

Exercice 6 Soit a un réel et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie pour $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = a\, 2^{-x}\mathbf{1}_{x>0} + a\, 2^{x}\mathbf{1}_{x\leq 0}$.

1. Pour quelle valeur de a, f est-elle la densité d'une loi de probabilité d'une variable X ?
2. Donner la fonction de répartition de X.
3. Soit Y la variable aléatoire donnée par : $Y = 2^X$. Donner la fonction de répartition de Y et calculer l'espérance $\mathbb{E}(Y)$ si elle existe.

Exercice 7 *Transformation de la loi de Cauchy.* Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Cauchy de densité $f(x) = \dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$ $(x \in \mathbb{R})$. Déterminer les lois des variables suivantes : $\dfrac{1}{X}$, $\dfrac{1+X}{1-X}$, X^2 et $\dfrac{1-X^2}{1+X^2}$.

Exercice 8 Soit, pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = a\, x^2\, e^{-\frac{x^2}{3}}\, \mathbf{1}_{x>0}$.

1. Déterminer a pour que f soit la densité d'une variable aléatoire X.
2. Donner la fonction de répartition F_X de X et déterminer la probabilité $\mathbb{P}(X > 1)$.
3. Calculer l'espérance $\mathbb{E}(X)$.

Exercice 9 *Loi log-normale.* On dit qu'une variable aléatoire positive X suit une loi log-normale de paramètres (m, σ^2) si $Y = \ln(X)$ suit une loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$, où $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$.

1. Déterminer la loi de la variable $\frac{Y-m}{\sigma}$.
2. Déterminer une densité de X. Calculer son espérance et sa variance.
3. Soit $Z = aX + b$ où $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$. Déterminer pour quels couples (a, b) la variable aléatoire Z suit aussi une loi log-normale.
4. Soit $T = X^n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la loi de T.