

Probabilités 5 – LICENCE L3 DEVOIR MAISON 1

EXERCICE (*extrait de l'examen de 2010*)

Soit f la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = \frac{1}{2\pi(1+x^2+y^2)^{3/2}}.$$

1. Montrer que f est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}^2$. *Indication* : penser aux coordonnées polaires.
2. Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires de densité f . Déterminer la loi du couple $\left(Y, \frac{X}{\sqrt{1+Y^2}}\right)$.
3. Les variables Y et $\frac{X}{\sqrt{1+Y^2}}$ sont-elles indépendantes ?

PROBLEME *Loi Gamma*

On définit la fonction Gamma par

$$\Gamma : x \mapsto \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt.$$

et, pour deux paramètres $p, \theta > 0$, la fonction

$$f_{p,\theta} : t \mapsto \frac{\theta^p}{\Gamma(p)} e^{-\theta t} t^{p-1} \mathbf{1}_{t>0}.$$

1. (*Rappels sur la Fonction Gamma*)
 - (a) Justifier que la fonction Γ est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
 - (b) Montrer que $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, pour tout $x > 0$.
 - (c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\Gamma(n+1) = n!$.
2. (*Loi Gamma : premières propriétés*)
 - (a) Montrer que $f_{p,\theta}$ définit bien une densité d'une loi de probabilité sur $\mathbb{R}$. On l'appelle loi Gamma, notée $\gamma(p, \theta)$.
 - (b) Calculer l'espérance et la variance d'une variable aléatoire X suivant la loi $\gamma(p, \theta)$.
3. (*Loi Bêta de première espèce*)

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de lois respectives $\gamma(p, \theta)$ et $\gamma(q, \theta)$ (avec $p, q, \theta > 0$). On note $S = X + Y$ et $T = X/(X + Y)$.

 - (a) Déterminer la loi du couple (S, T) .
 - (b) En déduire que S et T sont indépendantes, que S suit une loi $\gamma(p+q, \theta)$ et que la loi de T admet pour densité la fonction g définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad g(t) = \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\Gamma(q)} t^{p-1} (1-t)^{q-1} \mathbf{1}_{]0;1[}(t).$$

On l'appelle loi Bêta de première espèce.

4. (*Liens avec la loi normale*)
 - (a) Soit Z une variable aléatoire $\mathcal{N}(0, 1)$. Calculer une densité de la variable Z^2 . Quelle est la loi de Z^2 ? Montrer aussi que $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.
 - (b) Soient $(Z_i)_{i=1,\dots,n}$ des variables aléatoires indépendantes de même loi $\mathcal{N}(0, 1)$. Déduire de la question précédente et de la question 3.(b) que la variable $\sum_{i=1}^n Z_i^2$ suit une loi $\gamma(n/2, 1/2)$. On l'appelle loi du Chi-deux à n degré de liberté, notée $\chi^2(n)$.