Université Paris Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique
45 rue des Saints-Pères 75006 Paris
2011-2012 **LICENCE L2**

Probabilités 3

Feuille d'exercices n°4 : Couples de variables aléatoires sur un espace dénombrable.

Exercice 1 Soit n un entier supérieur ou égal à 1.

1. On lance un dé n fois de suite. On note X le nombre de fois où on a obtenu 6 et Y le nombre de fois où on a obtenu un nombre impair. Déterminer la loi du vecteur aléatoire (X, Y), ainsi que les lois marginales.
2. On lance maintenant deux dés, un blanc et un rouge. On répète ce lancer n fois de suite. On note U le nombre de fois où on a obtenu 6 avec le dé blanc, et V le nombre de fois où on a obtenu un nombre impair avec le dé rouge. Déterminer la loi du vecteur aléatoire (U, V), ainsi que les lois marginales. Que peut-on remarquer ?

Exercice 2

1. Soient $p, q \in [0; 1]$, $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ fixés. Soit X une variable aléatoire de loi binômiale de paramètres n et p. Soit aussi Y une variable telle que, pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$, la loi conditionnelle de Y sachant $X = k$ suit une loi binômiale de paramètres k et q. Calculer la loi de Y.
2. Dans une fête foraine, un jeu se passe en deux temps. On commence par entrer dans un labyrinthe. Puis, si on arrive à trouver la sortie, on se retrouve dans une pièce qu'il faut traverser en évitant une trappe invisible, qui envoie aux oubliettes. Si quelqu'un passe avec succès ces deux étapes, il gagne une peluche. On suppose que l'on sort du labyrinthe avec probabilité p et que l'on arrive à sortir de la deuxième pièce sans tomber dans les oubliettes avec probabilité q. Un groupe de 20 personnes se présente pour jouer. Quelle est la loi de probabilité du nombre de peluches qu'ils vont remporter ?

Exercice 3 Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de même loi géométrique de paramètre $p \in [0; 1]$.

1. Soit $U = \min(X, Y)$. Déterminer la loi de U.
2. Soit $V = X - Y$. Montrer que U et V sont indépendantes.

Exercice 4 Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois de Poisson de paramètres respectifs λ et μ.

1. Quelle est la loi du couple (X, Y) ?
2. Calculer la loi de la variable $T = X + Y$.
3. Calculer la loi conditionnelle de X sachant $X + Y = n$, pour $n \in \mathbb{N}$ fixé.

Exercice 5 Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires defini sur $A = \{(i, j) \in \mathbb{N}^2,\ 1 \leq i < j\}$, tel que :

$$\mathbb{P}\{(X, Y) = (i, j)\} = ap^j \qquad \forall (i, j)\ \in A,$$

où a est un réel strictement positif, et $0 < p < 1$.

1. Représenter graphiquement l'ensemble A. Déterminer la loi marginale de X en fonction de a. En déduire la valeur de a.

2. Calculer $\mathbb{E}(Y)$ et $\mathbb{E}(XY)$. Montrer que $\mathrm{Var}(Y) = 2\mathrm{Var}(X)$.
3. Montrer que X et $Y - X$ ont même loi. X et $Y - X$ sont-elles indépendantes ?

Exercice 6 Une station de comptage de voitures dénombre les véhicules qui circulent sur une route. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note X_n le nombre de véhicules passés entre les instants 0 et n. On suppose $X_0 = 0$, et qu'il existe $\lambda > 0$ tel que, pour tout couple $(m, n) \in \mathbb{N}^2$, avec $0 \leq m \leq n$,

- la variable $X_n - X_m$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda(n - m)$.
- les variables X_m et $X_n - X_m$ sont indépendantes.

Soit $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ tel que $0 \leq m \leq n$.

1. Calculer la covariance du couple (X_m, X_n).
2. Déterminer la loi du couple (X_m, X_n).
3. On suppose $n \neq 0$. Soit $k \in \mathbb{N}$ fixé. Quelle est la loi de X_m sachant $X_n = k$?
4. On note N la variable qui prend pour valeur le plus petit des entiers naturels non nuls k tel qu'au moins 1 véhicule soit passé entre les instants 0 et k. Déterminer la loi de N ainsi que son espérance.

Exercice 7 Trois personnes A_1, A_2, et A_3 entrent en même temps dans un bureau de poste, juste avant la fermeture. Il n'y a que deux guichets et ils sont libres. A_1 se présente au guichet 1, A_2 se présente au guichet 2 et A_3 attend qu'un guichet se libère. Si les deux guichets se libèrent en même temps, A_3 se présente au guichet 1.
Pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$, on note X_i la variable aléatoire représentant le nombre d'unités de temps nécessaires pour servir le client A_i. On suppose que les variables aléatoires X_1,X_2 ,X_3 sont définies sur le même espace de probabilité $(\Omega, \mathbb{P})$ et indépendantes, et qu'elles suivent la même loi de la forme : pour tout $n \geq 1$, $\mathbb{P}(X_i = n) = pq^{n-1}$, $0 < p < 1$, $q = 1 - p$.

1. a) Calculer, pour tout entier $n \geq 0$, la probabilité $\mathbb{P}(X_1 - X_2 = n)$. En déduire la loi de la variable aléatoire $T = |X_1 - X_2|$.
   b) Que représente l'évènement $\{X_3 > T\}$? Calculer la probabilité de cet évènement.
2. Pour $j \in \{1, 2\}$, on note T_j le temps écoulé entre l'arrivée des clients dans le bureau de poste et la fermeture du guichet j. On a, par exemple, $T_1 = X_1$ si $X_1 > X_2$ et $T_1 = X_1 + X_3$ si $X_1 \leq X_2$.
   a) Calculer $\mathbb{P}(X_1 \leq X_2)$.
   b) Calculer, pour tout entier $n \geq 1$, $\mathbb{P}(T_1 - X_1 = n)$.
   c) Montrer que $\mathbb{E}(T_1) = \mathbb{E}(X_1)(1 + \mathbb{P}(X_1 \leq X_2))$. En déduire la valeur de $\mathbb{E}(T_1)$.

Exercice 8 Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires à valeurs entières de loi donnée par

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N},\ j \leq i,\ \ \mathbb{P}\left((X, Y) = (i, j)\right) = (1 - a)(b - a)a^i b^{j-i-1},$$

avec a et b fixés tels que $0 < a < 1$ et $a < b$.

1. Déterminer $G_{(X,Y)}$, la fonction génératrice du couple (X, Y). *Rappel :* la fonction génératrice du couple (X, Y) est définie, pour $(s, t) \in]-1; 1[^2$, par
$$G_{(X,Y)}(s, t) = \mathbb{E}\left[s^X t^Y\right].$$
2. Déterminer les fonctions génératrices G_X et G_Y des variables X et Y.
3. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
4. Déterminer les lois de X et Y.