Université Paris Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique
45 rue des Saints-Pères 75006 Paris
2011-2012 **LICENCE L2**

Probabilités 3

Feuille d'exercices n°2 : Probabilités, indépendance, probabilités conditionnelles.

Exercice 1 Soient A et B deux évènements d'un univers Ω. Montrer l'inégalité de Bonferroni,

$$\mathbb{P}(A \cap B) \geq \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 1.$$

Exercice 2 Quel est le plus probable des évènements suivants :
a) jouant avec un dé : "on obtient au moins un six en 4 coups"
b) jouant avec deux dés : "on obtient au moins une paire de six en 24 coups"
c) jouant avec un dé : "on obtient au moins 2 six en 8 coups"

Exercice 3 Un homme distrait écrit 20 lettres à 20 destinataires différents, et ferme les enveloppes avant d'avoir écrit les adresses.

1. Décrire le modèle probabiliste associé à cette expérience.
2. Calculer la probabilité que le premier destinataire reçoive sa propre lettre.
3. Calculer la probabilité que chaque destinataire reçoive sa propre lettre.

Exercice 4 Un lac contient un grand nombre n de poissons. On en pêche m ($m \leq n$), on les marque et on les rejette à l'eau. Un peu plus tard, on en prélève à nouveau r ($r \leq n$).

1. Quelle est la probabilité $p_k(n)$ d'obtenir alors k poissons marqués ($k \leq m$) ?
2. On fixe r, m et k. Pour quelle valeur de n la quantité $p_k(n)$ est-elle maximum ? *Indication :* on calculera $p_k(n)/p_k(n-1)$.

Exercice 5 *Paradoxe des anniversaires de R. Von Mises.* On admettra que toutes les années ont 365 jours. On choisit n personnes au hasard. Quelle est la probabilité que 2 d'entre elles au moins aient leur anniversaire le même jour ? A l'aide de l'approximation $1 - x \approx \exp(-x)$ (pour x proche de 0), trouver la plus petite valeur de n telle que cette probabilité soit supérieure à 0.5.

Exercice 6 Soit $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$, muni de la probabilité uniforme. Soient les évènements $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3\}$, $C = \{1, 3\}$.

1. Les évènements A, B et C sont-ils deux à deux indépendants ?
2. Les évènements A, B et C sont-ils mutuellement indépendants ?

Exercice 7 On considère une famille qui comporte 2 enfants. On admet que les naissances sont indépendantes, et qu'à chaque naissance, la probabilité d'avoir une fille (resp. un garçon) est 1/2. Les évènements A : "il y a deux enfants de sexes différents", et B : "la famille a au plus une fille" sont-ils indépendants ? Même question si la famille a trois enfants.

Exercice 8 On considère deux urnes U_1 et U_2. On suppose que U_1 (respectivement U_2) contient n_1 boules noires et 5 boules blanches(resp.n_2 boules noires et 15 boules blanches). On choisit de façon équiprobable une des deux urnes puis on y effectue deux tirages successifs d'une boule avec remise. Soit N_1 (resp. N_2) l'évènement "on a obtenu une boule noire au premier (resp. au second) tirage".

1. Quelle est la probabilité de N_1 ? Quelle est la probabilité de N_2 ?
2. Les évènements N_1 et N_2 sont-ils indépendants ? (on discutera suivant les valeurs de n_1 et n_2)

Exercice 9 On sait qu'à une date donnée, 4% de la population est atteinte d'une maladie virale A. On dispose de tests de dépistage de la maladie, qui présentent les caractéristiques suivantes (obtenues par des études statistiques existantes). Si la personne est malade, alors le test est positif avec une probabilité de 90%. Si la personne est saine, alors le test est positif avec une probabilité de 15%.

1. Quelle est la probabilité pour une personne tirée au hasard dans la population, d'être saine si son test est positif ?
2. Quelle est la probabilité pour une personne d'être malade si son test est négatif ?
3. Quelle est la probabilité pour une personne d'être saine si son test est négatif ?

Exercice 10 Deux urnes A et B contiennent respectivement deux boules blanches plus une boule noire, et une blanche plus cinq noire. On tire au hasard une boule dans l'urne A, et on la place dans l'urne B. On tire alors au hasard une boule dans B, qui s'avère être blanche. Quelle est la probabilité que la boule transférée ait été aussi blanche ?

Exercice 11 Avant d'être acceptés par une banque de sang, des échantillons de sang sont testés contre la présence du virus de l'hépatite A et B.
La probabilité que l'échantillon soit accepté quand le virus de l'hépatite n'est pas présent est de 0,95.
La probabilité que l'échantillon soit rejeté quand le virus de l'hépatite A est présent est de 0,8.
La probabilité que l'échantillon soit rejeté quand le virus de l'hépatite B est présent est de 0,95.
Si 4% de la population des donneurs de sang sont porteurs du virus de l'hépatite A et 1% du virus de l'hépatite B (aucun individu n'étant porteur à la fois des virus A et B), calculer la probabilité que, dans un échantillon accepté, le virus de l'hépatite A ou B soit présent.

Exercice 12 Un étudiant possède 4 cravates C_1, C_2, C_3, C_4. Il en change chaque jour en en choisissant une au hasard parmi les 3 cravates non portées. Le premier jour , il porte la cravate C_1. Soit X_n la variable aléatoire correspondant à la cravate portée le jour n.

1. Calculer la probabilité pour qu'au jour n, l'étudiant n'ait jamais reporté la cravate C_1.
2. Calculer la probabilité pour qu'au jour n , l'étudiant n'ait jamais porté la cravate C_4.
3. Exprimer le vecteur donnant la loi de probabilité de X_n en fonction de la loi de probabilité de X_{n-1}. En déduire la loi suivie par la variable X_n.

Exercice 13 Une maison comprend deux états de chauffage : l'état 1 qui consiste en un chauffage de base et l'état 2 qui consiste en l'ensemble du chauffage de base et d'un chauffage d'appoint. Les règles de fonctionnement sont les suivantes :

- Si l'on est dans l'état 1 un jour, on est le lendemain dans l'état 1 (resp l'état 2) avec une probabilité $\frac{1}{2}$ (resp $\frac{1}{2}$).
- Si l'on est dans l'état 2 un jour, on est le lendemain dans l'état 1 (resp l'état 2) avec une probabilité $\frac{3}{4}$ (resp $\frac{1}{4}$).

Sachant que l'on est un dimanche dans l'état 1, trouver la loi de probabilité de l'état où l'on sera le jour n (avec $n > 1$). *Indication :* on pourra appeler X_i la variable aléatoire représentant l'état du jour i.