EX 1.
Soient E, F, G trois ensembles.
1. (Cours) Soient $u : E \to F$, et $v : F \to G$ deux applications. Montrer que :
-Si $v \circ u$ est injective alors u aussi.
-Si $v \circ u$ est surjective alors v aussi.
2. Soient $f : E \to F$, $g : F \to G$ et $h : G \to E$ trois applications. On suppose que $h \circ g \circ f$ est injective, et que $g \circ f \circ h$ et $f \circ h \circ g$ sont surjectives. Montrer que f, g et h sont bijectives.

EX 2.
Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer les deux implications suivantes :
1. $(\forall \epsilon \geq 0,\ |a| < \epsilon) \ \Rightarrow\ a = 0$.
2. $(\forall \epsilon > 0,\ |a| < \epsilon) \ \Rightarrow\ a = 0$.

EX 3.
Soit E un ensemble. Les deux questions sont indépendantes.
1. Soit $a \in E$. Décrire $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{a\}))$.
2. Soient $A, B \in \mathcal{P}(E)$. Montrer qu'en général, $(A \backslash B) \cup B \neq A$.

EX 1.
Soit E un ensemble, et soient A, B, C trois parties de E. On rappelle que l'on note : $A \Delta B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$.
1. Montrer que $A \Delta B = (A \cup B) \backslash (A \cap B)$.
2. Montrer l'équivalence : $A \Delta B = A \Delta C \ \Leftrightarrow\ B = C$.
3. Montrer l'implication : $A \Delta B = A \cap B \ \Rightarrow\ A = B = \emptyset$.

EX 2.
Soient E un ensemble et $f : E \to E$ une application. Les deux questions sont indépendantes.
1. On suppose $f \circ f = f$. Montrer que :
-Si f est injective alors $f = id_E$.
-Si f est surjective alors $f = id_E$.
2. On suppose $f \circ f \circ f = f$. Montrer que f est injective si et seulement si elle est surjective.

EX 3.
Soient $f : E \to F$ et $g : E \to G$ deux applications. Soit aussi

$$h : \begin{array}{ccc} E & \to & F \times G \\ x & \mapsto & (f(x), g(x)). \end{array}$$

1. Montrer que si f ou g est injective alors h l'est.
2. Que peut on dire sur h si f et g sont surjectives ?

EX 1.
(Cours) Montrer que $\sqrt{p}$ n'est pas rationnel, où p est un nombre premier.

EX 2.
Soit E un ensemble. Soient A, B, C trois parties de E. Montrer les assertions suivantes :
1. $A = B \ \Leftrightarrow\ A \cap B = A \cup B$.
2. $A \cup B = A \cap C \ \Leftrightarrow\ B \subset A \subset C$.
3. $A \cup B = A \cup C$ et $A \cap B = A \cap C \ \Leftrightarrow\ B = C$.

EX 3.
Soit E un ensemble. Soient A, B deux parties de E. Soit l'application

$$f : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \to & \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \\ X & \mapsto & (X \cap A, X \cap B). \end{array}$$

Montrer les assertions suivantes :
1. f est injective si et seulement si $A \cup B = E$.
2. f est surjective si et seulement si $A \cap B = \emptyset$.
A quelles conditions f est-elle bijective ?