M.P.S.I., Colles, Semaine 5, Sujet 1.

On se place dans le plan euclidien muni d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

EX 1.
(Question de cours) Soit $\mathcal{D}$ une droite passant par $A(a, b)$ et dirigée par $\overrightarrow{u}(\alpha, \beta)$. Donner et démontrer l'expression de la distance de $M(x, y)$ à $\mathcal{D}$.

EX 2.
Soit ABC un triangle quelconque. On construit les points C' et B' à l'extérieur du triangle, de telle sorte que les triangles ABC' et ACB' sont rectangles et isocèles en A.
1. Montrer que (BB') et (CC') sont perpendiculaires et que $BB' = CC'$.
2. Montrer que la médiane de ABC issue de A est la hauteur issue de A dans $AB'C'$.

EX 3.
Soit ABC un triangle. Soit A' un point de (BC) distinct de B et C, B' un point de (AC) distinct de A et C, et C' un point de (AB) distinct de A et B. Montrer que les cercles circonscrits à $AB'C'$, $BC'A'$ et $CA'B'$ ont un point commun, appelé le pivot.

M.P.S.I., Colles, Semaine 5, Sujet 2.

On se place dans le plan euclidien muni d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

EX 1.
(Question de cours) Donner (et démontrer) l'équation polaire d'une droite ne passant pas par l'origine.

EX 2.
(Autour de l'orthocentre et des hauteurs d'un triangle)
Soit ABC un triangle.
1. Montrer que quelque soit le point M du plan, on a la relation suivante :

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{AB} = 0.$$

2. En déduire que les trois hauteurs du triangle ABC sont concourantes en un point H (appelé orthocentre).
3. Montrer que H vérifie $AB^2 - AC^2 = HB^2 - HC^2$.
4. Montrer que H vérifie aussi

$$\overrightarrow{HA}.\overrightarrow{HB} = \overrightarrow{HB}.\overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HC}.\overrightarrow{HA}.$$

5. On appelle aire orienté de ABC la quantité $\mathcal{A}(ABC) = det(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$, et aire géométrique : $\mathcal{S}(ABC) = |\mathcal{A}(ABC)|$. Montrer que $S = ah_A/2$, où h_A est la longueur de la hauteur issue de A, et $a = BC$.

M.P.S.I., Colles, Semaine 5, Sujet 3.

EX 1.
(Question de cours) Soient $\overrightarrow{u}$ un vecteur et A un point du plan fixé. Donner les lignes de niveau de l'application $M \mapsto \overrightarrow{u}.\overrightarrow{AM}$.

EX 2.
(Calcul de distances)
Soit ABC triangle équilatéral. Soit M un point à l'intérieur du triangle. Montrer que la somme des distances de M aux trois côtés du triangle ne dépend pas du point M choisi.
Indication : Soit O le pied de la hauteur issue de A dans ABC. On se placera dans le repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, où $\overrightarrow{i} = \overrightarrow{BC}/BC$, et $\overrightarrow{j} = \overrightarrow{OA}/OA$.

M.P.S.I., Colles, Semaine 5, Sujet 4.

On se place dans le plan euclidien muni d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

EX 1.
(Question de cours) Soit ABC un triangle. On note $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$.
1. Démontrer la formule d'Al-Kashi : $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\hat{A})$.
2. On note p le demi-périmètre de ABC c'est à dire $p = (a + b + c)/2$. Montrer que

$$\sin(\hat{A}) = \frac{2}{bc}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

EX 2.
(Etude d'une ligne de niveau, et équations de cercles)
1. Soient A et B 2 points du plan, et $k \in \mathbb{R}$. Décrire l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = k$. Bien préciser le cas $k = 0$.
2. Soient $A(0, 0)$, $B(3, 0)$, $C(1, 1)$. Le but est de trouver une équation du cercle passant par A, B et C.
- Vérifier que A, B et C ne sont pas alignés.
- Trouver une équation du cercle de diamètre AB, de la forme $P_1(M) = 0$.
- Trouver une équation cartésienne de la droite (AB), de la forme $P_2(M) = 0$.
- Justifier brièvement que l'équation $P_1(M) + \lambda P_2(M) = 0$, où $\lambda \in \mathbb{R}$, est l'équation d'un cercle passant par A et B.
- En déduire une équation du cercle passant par A, B et C.