EX 1.

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Soient p, q deux projecteurs de E . Montrer l'équivalence suivante :

$$\text{Ker } p = \text{Ker } q \iff p \circ q = p \text{ et } q \circ p = q.$$

EX 2.

Soit E l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soit $F = \{f \in E, f(0) = 0\}$.

1. Montrer brièvement que F est un sous espace vectoriel de E .
2. Donner au moins deux supplémentaires de F dans E .

EX 3.

Caractériser l'application suivante :

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{R}[X] &\rightarrow \mathbb{R}[X] \\ P(X) &\mapsto P(-X). \end{aligned}$$

EX 1.

Soit $E = \mathbb{C}[X]$. Soit $A \in E$ fixé, avec $d^{\circ}A \geq 1$. On note :

$$F = \{PA, P \in E\}, G = \{P \in E, d^{\circ}P < d^{\circ}A\}, \text{ et } H = \{P \in E, d^{\circ}P \leq d^{\circ}A\}$$

1. Montrer rapidement que F, G, H sont des sous espaces vectoriels de E .
2. Montrer que F et G sont supplémentaires dans E .
3. Que valent $F + H$ et $F \cap H$?

EX 2.

Soit E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel.

1. Soient $f \in \mathcal{L}(E)$, et p un projecteur de E . Montrer que

$$\text{Ker } f \circ p = \text{Ker } p \oplus (\text{Ker } f \cap \text{Im } p).$$

2. Soient q un projecteur de E et $g \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que

$$\text{Im } q \circ g = \text{Im } q \cap (\text{Ker } q + \text{Im } g).$$

3. Soit p un projecteur de E . Justifier que $id - p$ est un projecteur et que $\text{Ker } p = \text{Im}(id - p)$, $\text{Im } p = \text{Ker}(id - p)$.
4. Soient p, q projecteurs de E . Montrer que $q \circ p$ est un projecteur si et seulement si

$$\text{Im } q \cap (\text{Ker } q + \text{Im } p) \subset \text{Im } p \oplus (\text{Ker } q \cap \text{Ker } p).$$

EX 1.

Soient $A = \{(\alpha, \alpha, \alpha), \alpha \in \mathbb{R}\}$ et $B = \{(x, y, z), x + y + z = 0\}$.

1. Rappeler brièvement pourquoi A et B sont des sous espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.
2. Montrer que A et B sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

EX 2.

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Soient p, q deux projecteurs de E .

1. Montrer que $p + q$ est un projecteur si et seulement si $p \circ q = q \circ p = 0$.
2. Interpréter ce qui précède au moyen de $\text{Ker } p$, $\text{Ker } q$, $\text{Im } p$, $\text{Im } q$.
3. Si $p + q$ est un projecteur, que valent alors $\text{Im } p + q$ et $\text{Ker } p + q$?

EX 3.

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Soient F, G des sous espaces vectoriels de E tels que $F + G = E$. Soit F' supplémentaire de $F \cap G$ dans F . Montrer que $F' \oplus G = E$.