M.P.S.I., Colles, Semaine 23, Sujet 1.

EX 1.
(Question de cours) Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et soit a un point de I qui ne soit pas une borne. Montrer que si f présente un maximum local en a, $f'(a) = 0$.
EX 2.
Soient $a < b$. Soit $g : [a;b] \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable telle que $g(a) = g(b) = 0$. Soit $x_0 \in]a;b[$. Soit aussi

$$g_1 : x \mapsto g(x) - \frac{A}{2}(x-a)(x-b), \text{ où } A = \frac{2g(x_0)}{(x_0-a)(x_0-b)}.$$

Montrer qu'il existe $\alpha \in]a;b[$ tel que $A = g'(\alpha)$.
EX 3.
1. Soit $f_p : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto x^p$. Pour quelles valeurs de p la fonction f_p est elle convexe ?
2. Soient $(a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}_+^{2n}$. Soient $p, q > 0$ tels que $1/p + 1/q = 1$. Montrer l'inégalité suivante (dite inégalité de Hölder) :

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n b_i^q\right)^{1/q}.$$

M.P.S.I., Colles, Semaine 23, Sujet 2.

EX 1.
(Question de cours) Enoncer et démontrer le théorème de Rolle.
EX 2.
Soit $a \in \mathbb{R}$, soit $h > 0$. Soit f une fonction continue sur $[a-h, a+h]$, dérivable sur $]a-h, a+h[$. Montrer qu'il existe $\mu \in]0;1[$ tel que

$$\frac{f(a+h) - f(a-h)}{h} = f'(a+\mu h) - f'(a-\mu h).$$

Indication : on pourra considérer $g(x) = f(a+x) - f(a-x)$ pour $x \in [0;h]$.
EX 3.
Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$.
1. Calculer la dérivée $n-$ième de $\varphi(x) = x^n(1-x)^n$.
2. En déduire la valeur de $\sum_{p=0}^n (C_n^p)^2$.

M.P.S.I., Colles, Semaine 23, Sujet 3.

EX 1.
(Question de cours) Enoncer et démontrer le théorème des accroissements finis.
EX 2.
Soit P un polynôme à coefficients réels. Montrer que l'équation $P(x) = \exp(x)$ n'a qu'un nombre fini de solutions sur $\mathbb{R}$.
EX 3.
1. Soient f, g deux fonctions. On suppose f convexe croissante et g convexe. Montrer que $f \circ g$ est convexe.
2. Soit I un intervalle. On dit qu'une fonction $\varphi : I \to \mathbb{R}_+^*$ est log-convexe si $\ln(\varphi)$ est convexe. Montrer que si f est log-convexe, alors f est convexe. Que dire de la réciproque ?

M.P.S.I., Colles, Semaine 23, Sujet 1.

EX 1.
(Question de cours) Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et soit a un point de I qui ne soit pas une borne. Montrer que si f présente un maximum local en a, $f'(a) = 0$.
EX 2.
Soient $a < b$. Soit $g : [a;b] \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable telle que $g(a) = g(b) = 0$. Soit $x_0 \in]a;b[$. Soit aussi

$$g_1 : x \mapsto g(x) - \frac{A}{2}(x-a)(x-b), \text{ où } A = \frac{2g(x_0)}{(x_0-a)(x_0-b)}.$$

Montrer qu'il existe $\alpha \in]a;b[$ tel que $A = g'(\alpha)$.
EX 3.
1. Soit $f_p : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto x^p$. Pour quelles valeurs de p la fonction f_p est elle convexe ?
2. Soient $(a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}_+^{2n}$. Soient $p, q > 0$ tels que $1/p + 1/q = 1$. Montrer l'inégalité suivante (dite inégalité de Hölder) :

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n b_i^q\right)^{1/q}.$$

M.P.S.I., Colles, Semaine 23, Sujet 2.

EX 1.
(Question de cours) Enoncer et démontrer le théorème de Rolle.
EX 2.
Soit $a \in \mathbb{R}$, soit $h > 0$. Soit f une fonction continue sur $[a-h, a+h]$, dérivable sur $]a-h, a+h[$. Montrer qu'il existe $\mu \in]0;1[$ tel que

$$\frac{f(a+h) - f(a-h)}{h} = f'(a+\mu h) - f'(a-\mu h).$$

Indication : on pourra considérer $g(x) = f(a+x) - f(a-x)$ pour $x \in [0;h]$.
EX 3.
Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$.
1. Calculer la dérivée $n-$ième de $\varphi(x) = x^n(1-x)^n$.
2. En déduire la valeur de $\sum_{p=0}^n (C_n^p)^2$.

M.P.S.I., Colles, Semaine 23, Sujet 3.

EX 1.
(Question de cours) Enoncer et démontrer le théorème des accroissements finis.
EX 2.
Soit P un polynôme à coefficients réels. Montrer que l'équation $P(x) = \exp(x)$ n'a qu'un nombre fini de solutions sur $\mathbb{R}$.
EX 3.
1. Soient f, g deux fonctions. On suppose f convexe croissante et g convexe. Montrer que $f \circ g$ est convexe.
2. Soit I un intervalle. On dit qu'une fonction $\varphi : I \to \mathbb{R}_+^*$ est log-convexe si $\ln(\varphi)$ est convexe. Montrer que si f est log-convexe, alors f est convexe. Que dire de la réciproque ?