M.P.S.I., Colles, Semaine 22, Sujet 1.

EX 1.
(Question de cours) Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. Définir les notions suivantes : continuité de f sur I, uniforme continuité de f sur I, caractère lipschitzien de f sur I. Quels sont les liens entre ces notions ?
EX 2.
1. Soit $f : [0;1] \to [0;1]$ une fonction continue. Montrer que f admet un point fixe, c'est à dire qu'il existe $x \in [0;1]$ tel que $f(x) = x$.
2. Soient f, g deux fonctions définies sur $[0;1]$ et à valeurs dans $[0;1]$, continues, telles que $f \circ g = g \circ f$. Montrer qu'il existe $x \in [0;1]$ tel que $f(x) = g(x)$.

EX 3.
1. Etudier si la fonction f est continue, dérivable, continument dérivable sur $\mathbb{R}$ où $f(x) = x|x|$.
2. Calculer la dérivée n-ième de la fonction $f(x) = 1/(x^2 - 1)$.

M.P.S.I., Colles, Semaine 22, Sujet 2.

EX 1.
(Question de cours) Enoncer la formule de Leibniz.
EX 2.
On considère la fonction $f(x) = \sqrt{x}$.
1. Montrer que f est lipschitzienne sur $[a, \infty[$, quel que soit $a > 0$.
2. En raisonnant par l'absurde, montrer qu'elle ne l'est pas sur $\mathbb{R}_+$.
3. Montrer que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

EX 3.
Soit $f : [0;2] \to \mathbb{R}$ continue, telle que $f(0) = 0$, $f(2) = 2$. Montrer qu'il existe $x \in [0;1]$ tel que $f(x+1) - f(x) = 1$.
EX 4.
Etudier si les fonctions suivantes sont continues, dérivables, continument dérivable :
1. $g(x) = x \sin(1/x)$ si $x \neq 0$, $g(0) = 0$.
2. $h(x) = x^2 \sin(1/x)$ si $x \neq 0$, $h(0) = 0$.

M.P.S.I., Colles, Semaine 22, Sujet 3.

EX 1.
(Question de cours) Enoncer (précisément !) le théorème des valeurs intermédiaires.
EX 2.
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue, telle que $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$. Montrer que f est minorée sur $\mathbb{R}$.
EX 3.
On considère la fonction $f(x) = x^2$.
1. Montrer que f est lipschitzienne et uniformément continue sur $[0;a]$, quel que soit $a > 0$.
2. En raisonnant par l'absurde, montrer qu'elle n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$.
3. Montrer que f n'est pas non plus lipschitzienne sur $\mathbb{R}_+$.

EX 4.
Donner la dérivée n-ième de la fonction $f(x) = \exp(x)\cos(x)$.

M.P.S.I., Colles, Semaine 22, Sujet 1.

EX 1.
(Question de cours) Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. Définir les notions suivantes : continuité de f sur I, uniforme continuité de f sur I, caractère lipschitzien de f sur I. Quels sont les liens entre ces notions ?
EX 2.
1. Soit $f : [0;1] \to [0;1]$ une fonction continue. Montrer que f admet un point fixe, c'est à dire qu'il existe $x \in [0;1]$ tel que $f(x) = x$.
2. Soient f, g deux fonctions définies sur $[0;1]$ et à valeurs dans $[0;1]$, continues, telles que $f \circ g = g \circ f$. Montrer qu'il existe $x \in [0;1]$ tel que $f(x) = g(x)$.

EX 3.
1. Etudier si la fonction f est continue, dérivable, continument dérivable sur $\mathbb{R}$ où $f(x) = x|x|$.
2. Calculer la dérivée n-ième de la fonction $f(x) = 1/(x^2 - 1)$.

M.P.S.I., Colles, Semaine 22, Sujet 2.

EX 1.
(Question de cours) Enoncer la formule de Leibniz.
EX 2.
On considère la fonction $f(x) = \sqrt{x}$.
1. Montrer que f est lipschitzienne sur $[a, \infty[$, quel que soit $a > 0$.
2. En raisonnant par l'absurde, montrer qu'elle ne l'est pas sur $\mathbb{R}_+$.
3. Montrer que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

EX 3.
Soit $f : [0;2] \to \mathbb{R}$ continue, telle que $f(0) = 0$, $f(2) = 2$. Montrer qu'il existe $x \in [0;1]$ tel que $f(x+1) - f(x) = 1$.
EX 4.
Etudier si les fonctions suivantes sont continues, dérivables, continument dérivable :
1. $g(x) = x \sin(1/x)$ si $x \neq 0$, $g(0) = 0$.
2. $h(x) = x^2 \sin(1/x)$ si $x \neq 0$, $h(0) = 0$.

M.P.S.I., Colles, Semaine 22, Sujet 3.

EX 1.
(Question de cours) Enoncer (précisément !) le théorème des valeurs intermédiaires.
EX 2.
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue, telle que $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$. Montrer que f est minorée sur $\mathbb{R}$.
EX 3.
On considère la fonction $f(x) = x^2$.
1. Montrer que f est lipschitzienne et uniformément continue sur $[0;a]$, quel que soit $a > 0$.
2. En raisonnant par l'absurde, montrer qu'elle n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$.
3. Montrer que f n'est pas non plus lipschitzienne sur $\mathbb{R}_+$.

EX 4.
Donner la dérivée n-ième de la fonction $f(x) = \exp(x)\cos(x)$.