Interrogation surveillée d'Algèbre et Géométrie

Durée : 1h30

Tout appareil électronique est interdit, notamment les calculatrices, les téléphones portables... Les documents ne sont pas non plus autorisés.

Le soin apporté à votre copie (lisibilité, présentation) et la clarté des raisonnements et de l'expression écrite prennent une part importante dans l'évaluation.

Les exercices sont indépendants. Ils peuvent être traités dans l'ordre de votre choix.

Questions de cours

1. Donner la définition d'une racine $n-$ième de l'unité. Rappeler l'expression des n racines $n-$ièmes de l'unité, pour un entier naturel n non nul.
2. Donner l'expression complexe d'une rotation de centre $\Omega(\omega)$ et d'angle $\theta \in \mathbb{R}^*$, dans le plan muni d'un repère orthonormé direct. Justifier.
3. Quel est l'ensemble des points M d'affixe z du plan tels que $z\bar{z} = 1$?

Exercice 1 Soient les nombres complexes $z_1 = \frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}$ et $z_2 = 1 - i$.

1. Mettre sous forme trigonométrique $Z = z_1/z_2$.
2. En déduire que $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.
3. Résoudre l'équation d'inconnue réelle x suivante :

$$(\sqrt{6}+\sqrt{2})\cos(x) + (\sqrt{6}-\sqrt{2})\sin(x) = 2.$$

Exercice 2 Soit n un entier naturel, $n \geq 2$. On note $C_n = \sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)$, et $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.

1. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} e^{i\frac{k\pi}{n}} = \frac{2}{1-e^{i\frac{\pi}{n}}}$.
2. Montrer que $C_n = 1$ et calculer également S_n.

Exercice 3 Soit $ABCD$ un tétraèdre. On définit les points G, I, J, K et L par

- G est le centre de gravité du triangle ABC.
- I et J sont les milieux respectifs de $[AB]$ et $[BC]$.
- $\overrightarrow{DC} = 4\overrightarrow{DK}$, et $\overrightarrow{DA} = 4\overrightarrow{DL}$.

1. Exprimer chacun des points G, I, J, K et L comme barycentres des sommets du tétraèdre.
2. En introduisant un barycentre bien choisi des sommets du tétraèdre, montrer que les droites (IK), (JL) et (DG) sont concourantes.

Exercice 4 L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère les points A, B, et C de coordonnées respectives $(1, 0, 2)$, $(1, 1, 4)$, et $(-1, 1, 1)$. Les trois questions sont indépendantes.

1. (a) Montrer que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.
   (b) Donner les coordonnées d'un vecteur $\vec{n}$ orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. En déduire une équation du plan (ABC).
2. Soient $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ les plans d'équations respectives $2x + y + 2z + 1 = 0$ et $x - 2y + 6z = 0$.
   (a) Montrer que $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont sécants selon une droite $\mathcal{D}$ admettant pour vecteur directeur $\vec{u}(-2, 2, 1)$.
   (b) Déterminer une représentation paramétrique de $\mathcal{D}$.
3. Soit t un réel positif quelconque. On considère G_t le barycentre des points pondérés $(A, 1)$, $(B, 2)$, (C, t), et I le barycentre de $(A, 1)$ et $(B, 2)$.
   (a) Justifier l'existence de G_t pour tout réel positif t.
   (b) Montrer que $\overrightarrow{IG_t} = \frac{t}{3+t}\overrightarrow{IC}$.
   (c) Montrer que l'ensemble des points G_t quand t décrit l'ensemble des nombres réels positifs ou nuls est le segment $[IC]$ privé du point C. Pour quelle valeur de t le milieu J de $[IC]$ coincide-t-il avec G_t ?