Université Paris Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères
75270 Paris cedex 06
2010-2011
LICENCE L3

Algèbre Linéaire et Bilinéaire

Correction de l'Exercice 5, Feuille d'exercices n°2

1. Les $n-1$ premières colonnes de A sont identiques, formant un vecteur non nul. De plus, ce vecteur colonne est linéairement indépendant de la dernière colonne de A (les deux vecteurs -1ère colonne et dernière colonne- sont non proportionnels). Donc le rang de A est 2. En appliquant le théorème du rang, on obtient donc dim Ker(A) $= n-2$. Par conséquent, 0 est valeur propre de A de multiplicité $n-2$ au moins, et le sous-espace propre associé, $E_0 = \mathrm{Ker}(A)$, est de dimension $n-2$.
2. La matrice A est symétrique (${}^tA = A$) et à coefficients réels, donc diagonalisable (et on sait d'ailleurs aussi qu'il existe une base orthonormée de vecteurs propres).
3. *Première méthode, permettant simplement de justifier l'existence de λ_+ et λ_-.* On sait que la matrice A admet n valeurs propres, comptées avec leur multiplicité. La valeur 0 étant valeur propre de A de multiplicité supérieure ou égale à $n-2$, il reste donc deux valeurs propres possibles α et β. Pour l'instant, on ne sait pas qu'elles sont non nulles, ni qu'elles sont de signes opposés. On sait aussi que la trace de A est égale à la somme des valeurs propres comptées avec leur multiplicité, c'est-à-dire,
$$\mathrm{Tr}(A) = 0 \times (n-2) + \alpha + \beta.$$
Or en regardant la matrice A, on voit que $\mathrm{Tr}(A) = 0$. Donc $\alpha + \beta = 0$. Par conséquent, on a deux possibilités : soit $\alpha = 0$ et alors $\beta = 0$, soit α est non nulle, et dans ce cas $\beta = -\alpha$ l'est aussi, et ces deux valeurs sont donc distinctes et de signes opposés. Il reste donc à éliminer la première possibilité. Raisonnons par l'absurde. Si $\alpha = \beta = 0$, alors 0 serait l'unique valeur propre de A, et comme A est diagonalisable (cf question 2.), elle serait semblable à la matrice $0I_n$, c'est-à-dire égale à $0I_n$ (c'est ce qu'on a vu en TD, le 15/02), ce qui n'est pas le cas. Donc ceci est exclu. Et ainsi, il existe deux valeurs propres distinctes de signes opposées que l'on note λ_+ et λ_-.
Deuxième méthode, permettant aussi le calcul des valeurs propres (ce qui était demandé). On cherche en même temps les vecteurs propres et les valeurs propres. Soit λ une valeur propre de A, supposée non nulle. Alors, par définition, il existe $X = {}^t(x_1, \dots, x_n)$ un vecteur propre associé, c'est-à-dire un vecteur *non nul* tel que $AX = \lambda X$. Ceci signifie
$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$
$$\iff \left\{ \begin{array}{l} x_n = \lambda x_1, \\ x_n = \lambda x_2, \\ \vdots \\ x_n = \lambda x_{n-1}, \\ x_1 = \dots = x_{n-1} = \lambda x_n, \end{array} \right. \qquad \iff \left\{ \begin{array}{l} x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1} = \frac{x_n}{\lambda}, \\ (n-1)\frac{x_n}{\lambda} = \lambda x_n, \end{array} \right.$$

La deuxième équation donne

$$\left(\frac{n-1}{\lambda}-\lambda\right)x_n=0,$$

et donc $x_n=0$ ou $(n-1)-\lambda^2=0$. Mais si $x_n=0$, la première équation entraîne $x_1=\cdots=x_{n-1}=0$, et donc $X=0$, ce qui est impossible. Par conséquent, on a $(n-1)-\lambda^2=0$, c'est-à-dire, $\lambda=\sqrt{n-1}$ ou $-\sqrt{n-1}$. Ce sont les deux valeurs propres λ_+ et λ_- cherchées. Cherchons les sous-espaces propres associés. Si $\lambda=\lambda_+$, le système ci-dessus est équivalent à l'equation

$$x_1=x_2=\cdots=x_{n-1}=\frac{x_n}{\lambda_+}.$$

On voit qu'il suffit de fixer la valeur de x_n pour connaitre les autres x_i. En prenant par exemple $x_n=\lambda_+=\sqrt{n-1}$, on obtient $x_i=1$, pour les indices $i=1,\ldots,n-1$. Par conséquent

$$E_+=\operatorname{Ker}(A-\lambda_+I_n)=\operatorname{Vect}\left\{\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\\ \sqrt{n-1}\end{pmatrix}\right\}.$$

De même

$$E_-=\operatorname{Ker}(A-\lambda_-I_n)=\operatorname{Vect}\left\{\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\\ -\sqrt{n-1}\end{pmatrix}\right\}.$$

4. On retrouve bien avec la deuxième méthode ci-dessus ce qu'on avait obtenu avec la première méthode : sur la matrice A, on lit $\operatorname{Tr}(A)=0$, et si on fait la somme des valeurs propres comptées avec multiplicités, on trouve $\operatorname{Tr}(A)=0\times(n-2)+\lambda_++\lambda_-=0$. Ce qui est cohérent.
5. On sait maintenant que 0 est valeur propre de A de multiplicité exactement $n-2$ et que λ_+ et λ_- sont valeurs propres de A de multiplicité 1. Donc

$$C_A(X)=\det(XI_n-A)=X^{n-2}(X-\lambda_+)(X-\lambda_-).$$

De plus, la matrice A est diagonalisable, donc son polynôme minimal est scindé à racines simples. Et les racines du minimal sont les valeurs propres. Par conséquent,

$$M_A(X)=X(X-\lambda_+)(X-\lambda_-).$$