Université Paris Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique
45 rue des Saints-Pères 75006 Paris
2010-2011 **LICENCE L3**

Algèbre Linéaire et Bilinéaire

Feuille d'exercices n°4 : Espaces hermitiens, Endomorphismes normaux

• Décompositions classiques de matrices

Exercice 1 *(Décomposition d'Iwasawa)* Soit H une matrice hermitienne définie positive. Montrer qu'il existe une unique matrice triangulaire supérieure T à coefficients diagonaux positifs telle que $H = T^*T$.

Exercice 2 *(Racine carrée)* Soit H une matrice hermitienne positive. L'objectif est de montrer qu'il existe une unique matrice hermitienne positive R telle que $H = R^2$.
1) Rappeler pourquoi les valeurs propres de H sont réelles, et positives.
2) En déduire qu'il existe une matrice hermitienne positive R telle que $H = R^2$.
3) Montrer que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est diagonalisable à valeurs propres positives, alors il existe un polynôme Q (de $\mathbb{C}[X]$) telle que $A = Q(A^2)$.
4) En déduire l'unicité de la matrice R dont on a montré l'existence à la question 2).

Exercice 3 *(Décomposition polaire)* Soit $A \in GL_n(\mathbb{C})$. L'objectif est de montrer qu'il existe un unique couple de matrice (U, H), avec U unitaire, H hermitienne positive, telle que $A = UH$.
1) On suppose que A s'écrit $A = UH$ avec U et H comme dans l'énoncé. Calculer A^*A.
2) En déduire, en utilisant l'exercice précédent, l'existence et l'unicité de la décomposition.
3) Peut-on étendre ce résultat si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$?

• Endomorphismes normaux

Exercice 4 Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable. Est-ce en contradiction avec la théorie ?

Dans la suite, $(E, \langle ., . \rangle)$ désigne un espace hermitien.

Exercice 5 Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que u est un endomorphisme normal, si et seulement si son adjoint u^* est un polynôme en u.

Exercice 6 1) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, tel que pour tout $x \in E$, $\langle f(x), x \rangle = 0$. Montrer que $f = 0$. Est-ce encore vrai si E est un espace euclidien ?
2) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que u est normal, si et seulement si pour tout $x \in E$, $\|u(x)\| = \|u^*(x)\|$.

Exercice 7 Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.
1) Montrer qu'il existe un unique couple (u, v) d'endomorphismes autoadjoints tel que $f = u + iv$.
2) Montrer que l'endomorphisme f est normal, si et seulement si u et v commutent.