Université Paris Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères
75270 Paris cedex 06
2010-2011
LICENCE L3

Algèbre Linéaire et Bilinéaire

Correction des Exercices 6 et 8, Feuille d'exercices n°3

Exercice 8

Etude d'un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$ *:*

$$\varphi : (P,Q) \mapsto P(0)Q(0) + P(1)Q(1) + P(2)Q(2).$$

1. Montrons que φ est un ***produit scalaire***, c'est-à-dire une forme bilinéaire symétrique définie-positive. L'application φ est à valeurs réelles, c'est donc bien une *forme*. Si $P, Q \in \mathbb{R}_2[X]$, on a $\varphi(P,Q) = \varphi(Q,P)$, donc cette forme est *symétrique*. Par conséquent, il suffit de justifier la linéarité à gauche pour démontrer la *bilinéarité*. Soient $P_1, P_2, Q \in \mathbb{R}_2[X]$, et $\lambda \in \mathbb{R}$. En utilisant que $(\lambda P_1 + P_2)(x) = \lambda P_1(x) + P_2(x)$, pour $x = 0, 1, 2$ on obtient que $\varphi(\lambda P_1 + P_2, Q) = \lambda\varphi(P_1, Q) + \varphi(P_2, Q)$, ce qui est exactement la linéarité à gauche. Ainsi, l'application φ est une forme bilinéraire symétrique (on notera q la forme quadratique associée). Il reste à démontrer que φ est définie positive. Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$. On calcule
$$q(P) = \varphi(P,P) = P(0)^2 + P(1)^2 + P(2)^2.$$
On a donc $\varphi(P,P) \geq 0$ quelque soit P, ce qui signifie que φ est *positive*. De plus, si $\varphi(P,P) = 0$, alors $P(0) = P(1) = P(2) = 0$. Donc P a trois racines réelles. Or P est de degré au plus 2. Donc $P = 0$, et φ (ou q) est *définie positive*. C'est donc bien un produit scalaire.
La forme quadratique q est donc aussi définie positive. Sa ***signature*** est donc $(3,0)$.
2. Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$. Il existe donc trois coefficients réels a_0, a_1, a_2 tels que $P = a_0 + a_1X + a_2X^2$. Avec cette notation, $P(0) = a_0$. Ainsi,
$$\begin{aligned} P \in F &\iff a_0 = 0 \\ &\iff P = a_1X + a_2X^2 \\ &\iff P \in \mathrm{Vect}(X, X^2). \end{aligned}$$
Cela montre que F est un espace vectoriel dont une famille génératrice est $(\mathbf{X}, \mathbf{X^2})$. Comme ces deux polynômes sont aussi linéairement indépendants, cette famille constitue une base de F.
3. On dispose de la base $(e_1, e_2) = (X, X^2)$ de F. On note que
$$\varphi(e_1, e_2) = \varphi(X, X^2) = 0 \times 0 + 1 \times 1 + 2 \times 4 = 9 \neq 0,$$
donc cette base n'est pas orthogonale (donc a fortiori pas orthonormale). On va appliquer le procédé de Gram-Schmidt pour l'orthogonaliser. On cherche d'abord une base orthogonale (P_1, P_2) de F.
   - On pose $P_1 = e_1$ c'est-à-dire $P_1 = X$.
   - On pose ensuite $P_2 = e_2 - \lambda e_1$, avec λ choisi tel que $\varphi(P_1, P_2) = 0$. Comme
   $$\varphi(P_1, P_2) = \varphi(e_1, e_2 - \lambda e_1) = \varphi(e_1, e_2) - \lambda\varphi(e_1, e_1),$$
   on choisit $\lambda = \varphi(e_1, e_2)/\varphi(e_1, e_1)$. On a déjà vu que $\varphi(e_1, e_2) = 9$, et on a $\varphi(e_1, e_1) = 0^2 + 1^2 + 2^2 = 5$. Donc $\lambda = 9/5$, et $P_2 = e_2 - \lambda e_1 = X^2 - (9/5)X$.

Par le cours, on a construit (P_1, P_2), base orthogonale de F pour le produit scalaire φ. Pour obtenir une base orthonormale, on normalise les vecteurs : la famille $(P_1/\sqrt{\varphi(P_1,P_1)}, P_2/\sqrt{\varphi(P_2,P_2)})$ est donc une base orthonormale de F. On termine donc la question en calculant $\varphi(P_i, P_i)$, $(i = 1, 2)$: on a déjà vu que $\varphi(P_1, P_1) = \varphi(e_1, e_1) = 5$, et on calcule,

$$\varphi(P_2, P_2) = \left(1 - \frac{9}{\sqrt{5}}\right)^2 + \left(4 - \frac{9 \times 2}{\sqrt{5}}\right)^2.$$

4. Commençons par caractériser $F^{\perp}$. Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$. Ce polynôme appartient à $F^{\perp}$, si et seulement si, pour tout polynôme $Q \in F$, on a $\varphi(P, Q) = 0$. Comme (X, X^2) est une base de F, ceci équivaut à dire que $\varphi(P, X) = \varphi(P, X^2) = 0$. En calculant ces deux quantités, on en déduit que $P \in F^{\perp}$, si et seulement si,

$$\begin{cases} 0P(0) + 1P(1) + 2P(2) = 0 \\ 0P(0) + 1P(1) + 4P(2) = 0 \end{cases} \iff P(1) = P(2) = 0.$$

Ainsi, $P \in F^{\perp}$, si et seulement si, il a pour racines 1 et 2. Comme P est au plus de degré 2, on en déduit que $P = k \times (X-1)(X-2)$, pour un certain réel k. On a donc $\mathbf{F}^{\perp} = \mathrm{Vect}((\mathbf{X} - \mathbf{1})(\mathbf{X} - \mathbf{2}))$, et le polynôme $(X-1)(X-2)$ est une base de $F^{\perp}$.
Remarque : on connaissait sans calculs la dimension de $F^{\perp}$; en effet, on a $F \oplus F^{\perp} = \mathbb{R}_2[X]$, ce qui se traduit par $\dim(F^{\perp}) = 3 - \dim(F) = 3 - 2 = 1$.

Exercice 6

Le but de l'exercice était de démontrer que l'égalité $F = F^{\perp\perp}$ n'est pas nécessairement valable dans le cas d'un espace de dimension infinie, en considérant un sous-espace F de l'espace

$$E = \left\{ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n^2 < \infty \right\}.$$

1. Montrons que E est un sous-***espace vectoriel*** de l'espace vectoriel des suites réelles, $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On a bien $E \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, et la suite nulle est dans E. Soient ensuite $x = (x_n)$, $y = (y_n)$ deux éléments de E, et $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrons que $\lambda x + y$ est encore dan E. On utilise l'inégalité $(a+b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$, valable quelque soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ (en effet $(a+b)^2 - 2a^2 - 2b^2 = -(a-b)^2 < 0$). Cela donne, quelque soit $n \in \mathbb{N}$,
$$(\lambda x_n + y_n)^2 \leq 2\lambda^2 x_n^2 + 2y_n^2. \tag{1}$$
Comme les séries $\sum_n x_n^2$ et $\sum_n y_n^2$ convergent (car $x, y \in E$), la série $\sum_n (2\lambda^2 x_n^2 + 2y_n^2)$ converge aussi. Le critère de comparaison des séries à termes positifs, et l'inégalité 1 permettent de conclure que la série $\sum_n (\lambda x_n + y_n)^2$ converge, c'est-à-dire que $\lambda x + y \in E$. Ainsi, E est bien un espace vectoriel.
2. Montrons que l'on définit bien un ***produit scalaire*** en posant, pour $(x, y) \in E^2$, $\langle x, y\rangle = \sum_n x_n y_n$. Il faut d'abord justifier que $\langle x, y\rangle$ a un sens, pour $x, y \in E$, c'est-à-dire que la série $\sum_n x_n y_n$ converge. On utilise cette fois l'inégalité
$$|x_n y_n| \leq \frac{1}{2}\left(x_n^2 + y_n^2\right),$$
pour tout $n \in \mathbb{N}$ (cela provient des identités remarquables $(x_n \pm y_n)^2 \geq 0$). Comme les séries $\sum_n x_n^2$ et $\sum_n y_n^2$ convergent, on en déduit, toujours par critère de comparaison des séries à termes positifs, que $\sum_n x_n y_n$ converge absolument, donc converge. Par suite l'application $\langle ., .\rangle$ est bien définie. Montrons maintenant que c'est bien un produit scalaire. Tout d'abord, on a la symétrie : pour $x, y \in E$, $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$ puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n y_n = y_n x_n$. Pour montrer

que l'application $\langle .,. \rangle$ est bilinéaire, il suffit de montrer qu'elle est linéaire à gauche par exemple. Soient $(x, x', y) \in E^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. La série de terme général $(\lambda x_n + x'_n)y_n = \lambda x_n y_n + x'_n y_n$ est convergente, car les séries de termes généraux $x_n y_n$ et $x'_n y_n$ le sont. Comme de plus pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a

$$\sum_{n=0}^{N} (\lambda x_n + x'_n) y_n = \lambda \sum_{n=0}^{N} x_n y_n + \sum_{n=0}^{N} x'_n y_n,$$

on peut passer à la limite dans cette inégalité pour en déduire $\langle \lambda x + x', y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle + \langle x', y \rangle$. Ainsi, $\langle .,. \rangle$ est une application bilinéaire. Soit $x \in E$: on a bien $\langle x, x \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} x_n^2 \geq 0$, et cette quantité est nulle si et seulement si $x_n^2 = 0$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire si $x = 0$. Par conséquent l'application est définie positive, c'est donc un produit scalaire.
Remarques : on pouvait aussi noter que $E = \ell^2(\mathbb{N})$ est l'espace L^2 sur l'espace mesuré $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$, où μ désigne la mesure de comptage sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$. Le cours d'Intégration montre que cet espace est un espace de Hilbert...

3. Soit F l'ensemble des suites nulles à partir d'un certain rang :

$$F = \left\{ (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0,\ x_n = 0 \right\}.$$

On a bien $F \subset E$: soient $x \in E$, et n_0 le rang à partir duquel les termes de x sont nuls. Alors la somme infinie $\sum_{n \in \mathbb{N}} x_n^2$ est en fait égale à la somme finie $\sum_{n=0}^{n_0} x_n^2$, qui est donc bien finie. Ainsi $x \in F$. Montrons maintenant que F est un ***sous-espace vectoriel*** de E. La suite nulle appartient bien à F : tous ces termes sont nuls à partir du rang $n_0 = 0$! Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x^{(1)}$, $x^{(2)}$ deux suites de F. On note n_0 et n_1 les rangs à partir desquels les termes de chacune de ces deux suites sont nulles. Si $N = \max(n_0, n_1)$, alors à partir du rang N, tous les termes de la suite $\lambda x^{(1)} + x^{(2)}$ sont nuls. Donc cette suite appartient bien à F. Ce qui termine la question.

4. Déterminons $F^{\perp}$. Soit $x \in F^{\perp}$. Alors, quel que soit $y \in F$, $\langle x, y \rangle = 0 = \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n y_n$. Ceci étant valable pour toute suite y dans F, on va en choisir certaines particulières, qui vont nous permettre de caractériser x. Commençons par la suite $y = (1, 0, \ldots, 0, \ldots)$ (suite telle que $y_0 = 1$ et $y_n = 0$ dès que $n \geq 1$). Pour cette suite, $0 = \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n y_n = x_0 y_0 = x_0$. Donc $x_0 = 0$. Plus généralement, si on choisit pour y la suite dont tous les termes sont nuls sauf le $i-$ème qui vaut 1 ($i \in \mathbb{N}$), on trouve $0 = \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n y_n = x_i y_i = x_i$. Finalement, $x_i = 0$ quel que soit i, et donc $x = 0$. Ainsi, $F^{\perp} \subset \{0\}$. Comme $F^{\perp}$ est un sous-espace vectoriel de E, on a

$$\mathbf{F}^{\perp} = \{\mathbf{0}\}.$$

Déterminons maintenant $F^{\perp\perp}$. Par définition, il s'agit de l'ensemble des suites $y \in E$, telles que pour toute suite $x \in F^{\perp}$, $\langle x, y \rangle = 0$. Comme le seul élément de $F^{\perp}$ est la suite nulle, $F^{\perp\perp}$ est l'ensemble des suites y telles que $\langle y, 0 \rangle = 0$. Or ceci est vrai quel que soit l'élément y de E (linéarité à droite d'un produit scalaire). Donc

$$\mathbf{F}^{\perp\perp} = \mathbf{E}.$$

En particulier, $F \subsetneq F^{\perp\perp}$. Donc l'égalité $F = F^{\perp\perp}$ n'est pas nécessairement valable en dimension infinie !