Université Paris Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique
45 rue des Saints-Pères 75006 Paris
2011-2012 **LICENCE L3**

Algèbre Linéaire et Bilinéaire

Feuille d'exercices n°2 : Réduction des endomorphismes

Dans toute la feuille, k désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, n désigne un entier naturel non nul, et E désigne un k-espace vectoriel de dimension finie n.

• Diagonalisation, Trigonalisation

Exercice 1. Etudier la diagonalisation sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix} \quad ; \quad C = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & & \dots & & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & \dots & & \dots & & 0 \end{pmatrix},$$

où, dans la matrice C, le bloc constitué de "1" comporte p lignes et q colonnes, pour $q \leq p < n$.

Exercice 2. On considère l'endomorphisme u de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Est-il diagonalisable ? Déterminer les sous-espaces de $\mathbb{R}^3$ stables par l'endomorphisme u.

Exercice 3. Déterminer les valeurs propres des endomorphismes suivants de l'espace vectoriel E. On donnera également des vecteurs propres associés.

(1) $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $\phi : f \in E \mapsto f'$.

(2) $E = k[X]$, $\Phi : P \mapsto P'$, $\qquad \Psi : P \mapsto XP$, $\qquad \Theta : P \mapsto P(2X)$.

Exercice 4. Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{C}$ et u un endomorphisme de E, de rang égal à 1.

(1) On suppose que $\mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Ker}(u)$. Montrer que $u^2 = 0$. En déduire que u n'est pas diagonalisable.

(2) (a) On suppose que $\mathrm{Im}(u) \cap \mathrm{Ker}(u)$ n'est pas réduit à 0. Montrer que $\mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Ker}(u)$.
(b) En déduire que si $\mathrm{Im}(u)$ n'est pas inclus dans $\mathrm{Ker}(u)$, alors $\mathrm{Im}(u) \oplus \mathrm{Ker}(u) = E$. Montrer qu'alors, u est diagonalisable.

(3) Montrer que u est diagonalisable si et seulement si il admet une valeur propre non nulle.

Exercice 5. Donner un exemple de matrice 2×2 trigonalisable mais non diagonalisable. Donner un exemple de matrice de taille 2×2 non trigonalisable (sur $\mathbb{R}$!).

Exercice 6. On suppose $n \geq 3$. Soit $A = (a_{i,j})$ la matrice carrée de taille n telle que $a_{i,j} = 1$ si i ou j vaut n (mais pas les deux en même temps), et 0 sinon, c'est-à-dire :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(1) Donner le rang de A. 0 est-il valeur propre de A ? Quelle est la dimension du sous-espace propre associé ?

(2) Pourquoi peut-on affirmer sans aucun calcul que A est diagonalisable ?

(3) Montrer que A admet deux valeurs propres non nulles de signes opposés notées λ_+ et λ_-. Déterminer E_+ et E_- les sous espaces propres respectivement associés.

(4) Calculer la trace de A. Est-ce en accord avec les résultats des questions précédentes ?

(5) Donner les polynômes caractéristique et minimal de A.

• Réduction et polynômes d'endomorphisme

Exercice 7. Soit la matrice $A = \left(\begin{smallmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Déterminer le polynôme minimal de A. En déduire que A est inversible, et calculer son inverse.

Exercice 8. On définit l'application, $\Phi : \; A \in \mathcal{M}_n(k) \mapsto {}^tA$. Montrer que Φ est diagonalisable, et décrire les sous espaces propres associés aux valeurs propres de Φ.

Exercice 9. Donner les polynômes caractéristiques et minimaux des matrices suivantes.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 10. Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$ tels que $u \circ v = v \circ u$.

(1) Montrer que tout sous-espace propre de u est stable par v.

(2) Soit F un sous-espace de E stable par v. On suppose que v est diagonalisable. Montrer que la restriction de v à F est diagonalisable.

(3) On suppose maintenant que u et v sont diagonalisables. Montrer qu'ils sont diagonalisables dans une même base.

Exercice 11. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que E se décompose en somme directe de sous-espaces stables par u : précisément, il existe $r \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, $F_1, F_2, \ldots, F_r$ des sous-espaces vectoriels stables par u, tels que $E = F_1 \oplus \ldots \oplus F_r$.

(1) Que vaut le polynôme caractéristique de u en fonction des polynômes caractéristiques des restrictions de u aux sous-espaces F_i, $i = 1, \ldots, r$?

(2) Montrer que l'idéal des polynômes annulateurs de u est l'intersection des r idéaux annulateurs des restrictions de u aux sous-espaces F_i, $i = 1, \ldots, r$. En déduire que le polynôme minimal de u est le PPCM des polynômes minimaux des restrictions de u aux sous-espaces F_i.

• Endomorphismes nilpotents

Exercice 12. On considère, pour tout réel λ, la matrice carrée de taille n :

$$J_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & & \ldots & & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

(1) Calculer les puissances successives de J_0.

(2) En déduire le polynôme minimal de J_0, puis celui de J_λ, quel que soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

(3) Montrer que J_λ est semblable à ${}^tJ_\lambda$.

Exercice 13. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, où E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n.

(1) Montrer que u est nilpotent, si et seulement si $u^n = 0$.

(2) Montre l'équivalence entre les trois assertions suivantes :

$$(a)\ u \text{ est nilpotent} \quad (b)\ C_u = X^n, \quad (c)\ u \text{ est trigonalisable et } \mathrm{Sp}(u) = \{0\},$$

où C_u est le polynôme caractéristique de u et M_u son polynôme minimal.

Exercice 14. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

(1) On suppose que A est nilpotente. Montrer que $\mathrm{Tr}(A^p) = 0$, pour tout $p \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$.

(2) On veut démontrer la réciproque. On suppose que $\mathrm{Tr}(A^p) = 0$, pour tout $p \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$.
(a) Justifier que le polynôme caractéristique de A s'écrit

$$C_A = \prod_{k=1}^{r} (\lambda_k - X)^{m_k},$$

où $r \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, les λ_k sont des nombres complexes deux à deux distincts, et $m_k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$.
(b) Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, $\mathrm{Tr}(A^p) = \sum_{k=1}^{r} m_k \lambda_k^p$.
(c) On définit la matrice $M(\lambda_1, \ldots, \lambda_r) = (\lambda_j^{i-1})_{1 \le i,j \le r}$ et le vecteur colonne $V = (m_k \lambda_k)_{k=1,\ldots r}$.
Calculer le produit $M(\lambda_1, \ldots, \lambda_r)V$.
(d) En déduire que $\lambda_k = 0$ pour tout $k = 1, \ldots, r$ puis conclure.

• Réduction de Jordan

Exercice 15. On considère un endomorphisme u de $\mathbb{R}^5$ dont on connait les polynômes caractéristique C_u, et minimal M_u. Donner les formes possibles des réduites de Jordan pour u dans chacun des deux cas suivants :

(1) $C_u(X) = (X-1)^5(X+5)$, $\ M_u(X) = (X-1)^2(X+5)$.

(2) $C_u(X) = (X-1)^3(X+2)^2$, $\ M_u(X) = (X-1)^2(X+2)^2$.

Exercice 16. Soit E un $\mathbb{R}-$espace vectoriel de dimension 7. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ de polynôme caractéristique

$$C_u(X) = (X-2)^3(X+1)^4$$

et tel que $\dim(\mathrm{Ker}(u - 2Id)) = 3$ et $\dim(\mathrm{Ker}(u + Id)) = 2$.

(1) u est-il diagonalisable ? trigonalisable ? admet-il une réduite de Jordan ?

(2) Donner, à permutation des blocs près, les formes des réduites de Jordan possibles pour u. On précisera à chaque fois le polynôme minimal de u.

Exercice 17. Pour chacune des matrices suivantes, donner les polynômes caractéristique et minimal, une réduite de Jordan, puis construire une matrice de passage permettant d'écrire l'égalité matricielle reliant chaque matrice à sa réduite de Jordan.

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \\ -12 & 6 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad ; \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 & -12 \\ 1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 18. Soit E un k-espace vectoriel de dimension 9. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que pour deux valeurs distinctes α et β de k,

$$\dim \mathrm{Ker}(u - \alpha id) = 3, \ \dim \mathrm{Ker}(u - \alpha id)^2 = 5, \ \dim \mathrm{Ker}(u - \alpha id)^3 = 6.$$

$$\dim \mathrm{Ker}(u - \beta id) = 2, \ \dim \mathrm{Ker}(u - \beta id)^2 = 3.$$

Donner les polynômes caractéristique, minimal de u. Est-il diagonalisable ? trigonalisable ? Donner, si elle existe la réduite de Jordan de u (à permutation des blocs près). Décrire $\mathrm{Ker}(u - \gamma id)^p$ pour tout $p \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ et tout $\gamma \in k$. Donner toutes les réduites de Jordan correspondant au même minimal et même caractéristique que u.