

Algèbre Linéaire : Devoir Maison n°1

Exercice. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3, et $A = (a_{i,j})_{i,j \in \{1, \dots, n\}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice telle que : $a_{i,j} = 1$ si $|i - j| = 1$, et $a_{i,j} = 0$ sinon. On a donc

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- (1) On suppose que λ est une valeur propre de A , et $X = (x_k)_{k=1, \dots, n}$ un vecteur propre associé. Montrer qu'alors, on a la relation de récurrence linéaire

$$\forall k \in \{2, \dots, n+1\}, x_k - \lambda x_{k-1} + x_{k-2} = 0,$$

avec $x_0 = x_{n+1} = 0$.

- (2) En déduire que pour certains $\theta \in \mathbb{R}$ que l'on précisera, $\lambda = 2 \cos \theta$ est valeur propre de A , et donner un vecteur propre associé.
- (3) La matrice A est-elle diagonalisable?

Problème. Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension $n \geq 1$. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

On note $\mathcal{C}(u) = \{v \in \mathcal{L}(E) \mid u \circ v = v \circ u\}$, l'ensemble des endomorphismes qui commutent avec u , et $\mathbb{R}[u] = \{P(u) \mid P \in \mathbb{R}[X]\}$, l'ensemble des polynômes en u . L'objectif est de comparer $\mathcal{C}(u)$ et $\mathbb{R}[u]$ dans certains cas particuliers pour l'endomorphisme u .

- (1) Montrer que $\mathcal{C}(u)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ contenant toujours $\mathbb{R}[u]$.
- (2) On suppose qu'il existe $x_0 \in E$ tel que $\{x_0, u(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0)\}$ soit une famille libre. Soit $v \in \mathcal{C}(u)$.

(a) Justifier qu'il existe des réels $a_0, \dots, a_{n-1}$ tels que $v(x_0) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k u^k(x_0)$.

(b) Montrer que pour tout $x \in E$ on a $v(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k u^k(x)$. *Indication* : il suffit de montrer l'égalité pour les vecteurs x d'une base (bien choisie...).

(c) En déduire que $\mathcal{C}(u) = \mathbb{R}[u]$.

- (3) (a) On suppose que u admet n valeurs propres distinctes $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ et on choisit x_i un vecteur propre associé à λ_i . En considérant le vecteur $x_0 = x_1 + \dots + x_n$, et en utilisant le résultat de la question (2), montrer que $\mathcal{C}(u) = \mathbb{R}[u]$.
- (b) On suppose que u admet $M_u(X) = X^n$ pour polynôme minimal. Montrer qu'il existe $x_0 \in E$ tel que la famille $\{x_0, u(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0)\}$ est libre (*Indication* : on pourra étudier une réduite de Jordan de u). En déduire que $\mathcal{C}(u) = \mathbb{R}[u]$.
- (4) On suppose dans la suite que u est diagonalisable. On note $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ ses valeurs propres distinctes, E_i le sous-espace propre associé à λ_i , et n_i la dimension de E_i . Soit enfin $v \in \mathcal{C}(u)$.
- (a) Montrer que chaque E_i est stable par v .
- (b) On note $v_i = v|_{E_i}$ (resp. $u_i = u|_{E_i}$) l'endomorphisme induit par v (resp. par u) sur E_i . Montrer que $v_i \in \mathcal{C}(u_i)$.
- (c) Montrer que l'application

$$\begin{aligned} \Phi : \mathcal{C}(u) &\rightarrow \mathcal{C}(u_1) \times \dots \times \mathcal{C}(u_p) \\ v &\mapsto (v_1, \dots, v_p) \end{aligned}$$

est un isomorphisme. *Indication* : on montrera que Φ est bien définie et linéaire, puis, pour montrer que Φ est bijective, on cherchera l'application réciproque.

(d) Montrer que $\dim(\mathcal{C}(u_i)) = n_i^2$ (*Indication* : on remarquera que $n_i^2 = \dim(\mathcal{L}(E_i))$). En déduire la valeur de $\dim(\mathcal{C}(u))$.

- (5) (a) Que vaut le polynôme minimal de u ?
- (b) Montrer que $\{Id, u, \dots, u^{p-1}\}$ est une famille libre de $\mathbb{R}[u]$.
- (c) Montrer que pour tout $k \geq p$ on a $u^k \in \text{Vect}\{Id, u, \dots, u^{p-1}\}$ (*Indication* : on pourra utiliser la division euclidienne de X^k par le polynôme minimal de u). En déduire que $\{Id, u, \dots, u^{p-1}\}$ est une base de $\mathbb{R}[u]$.
- (6) Montrer que $\mathcal{C}(u) = \mathbb{R}[u]$ si et seulement si $p = n$.