TP 2 - Introduction aux méthodes de Monte Carlo [1]

1 Présentation et références

1.1 Principe et exemple d'utilisation

Soit X une variable aléatoire, et f une fonction à valeurs réelles mesurable telle que $f(X)$ soit intégrable. Les méthodes de Monte-Carlo recouvrent un ensemble général de problèmes où l'on cherche à calculer $\mathbb{E}[f(X)]$, en l'approchant par la moyenne empirique. Une référence pour tout ce qui concerne ces méthodes peut être [Tou99, Chap.4] (excepté pour l'Exemple 2 ci-dessous).

Exemple 1. Calcul approché d'intégrales (multiples).

- On souhaite calculer $I = \int_{[0;1]^d} f(x)dx$ pour une fonction intégrable f. On peut écrire $I = \mathbb{E}[f(X)]$ pour $X = (U_1, \ldots, U_d)$ un vecteur de d variables aléatoires *i.i.d.* de loi uniforme $\mathcal{U}_{[0;1]}$. Si on a un $n-$échantillon $(X_1, \ldots, X_n)$ du vecteur X, la Loi des grands nombres justifie que l'on peut approcher I par $\sum_{i=1}^n f(X_i)/n$.
- On souhaite calculer $I = \int f(x)p(x)dx$, où p est une fonction positive d'intégrale 1. On a alors $I = \mathbb{E}[f(X)]$ pour X une variable aléatoire de loi de densité p. Si on a un $n-$échantillon $(X_1, \ldots, X_n)$ de loi de densité p, obtenu par simulation par exemple, la Loi des grands nombres justifie que l'on peut approcher à nouveau I par $\sum_{i=1}^n f(X_i)/n$.

Exemple 2. Obtention de résultats non-asymptotiques (variables de lois difficile à estimer). [RS09, p.106]

Les méthodes de Monte-Carlo permettent de calculer le niveau exact à un rang fixé d'un intervalle de confiance asymptotique.

En effet, on suppose disposer d'un $n-$échantillon $\mathbb{X}^n = (X_1, \ldots, X_n)$ de loi dépendant d'un paramètre θ. On suppose avoir construit un intervalle (ou une région) de confiance $I(\mathbb{X}^n)$ asymptotique de niveau $\alpha \in]0;1[$, ce qui signifie $\underline{\lim}_{n\to\infty} \mathbb{P}(\theta \in I(\mathbb{X}^n)) \geq 1 - \alpha$. On souhaite connaître le niveau exact de cet intervalle à un rang n fixé (*ie.* pour un nombre d'observations donné). Ce niveau est donné par $\mathbb{P}(\theta \in I(\mathbb{X}^n)) = \mathbb{E}[Y]$ pour $Y = \mathbf{1}_{\theta \in I(\mathbb{X}^n)}$. Si on peut disposer d'un échantillon $(Y_1, \ldots, Y_n)$ de la variable Y, alors on peut à nouveau approcher $\mathbb{E}[Y]$ par la moyenne empirique correspondante. La méthode de Monte-Carlo est alors utile pour approcher des espérances de variables dont la loi exacte est difficile à calculer, mais facile à simuler.

1.2 Vitesse de convergence pour la méthode de Monte-Carlo [Tou99, Chap.4] [RS09, p.106-107]

On a vu que les Lois des grands nombres permettaient de justifier l'approximation de $I = \mathbb{E}[Y]$ par $\sum_{i=1}^n Y_i/n$, pour $(Y_1, \ldots, Y_n)$ un $n-$échantillon de la variable aléatoire Y. La suite des erreurs d'approximation est $(\varepsilon_n)_n$ avec

$$\varepsilon_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Y_i - \mathbb{E}[Y].$$

La question qui se pose est l'ordre de grandeur de ces erreurs. Le Théorème Central limite entraîne (si Y est de carré intégrable) la convergence en loi de $(\sqrt{n}\varepsilon_n)_n$ vers une loi $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$,

1. Enseignant : G. Chagny, bureau M.2.35. `gaelle.chagny@univ-rouen.fr`.

avec $\sigma^2 = \text{Var}(Y)$, et donc, la méthode de construction d'intervalles de confiance basée sur ce théorème entraîne que

$$I \in \left[\overline{Y}_n - q_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \overline{Y}_n + q_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right],$$

avec probabilité limite $1-\alpha$.

La précision des méthodes de Monte-Carlo ne dépend donc que de σ^2 et de n, et est de l'ordre $\sigma/\sqrt{n}$. Cette vitesse de convergence peut sembler lente par rapport aux méthodes numériques déterministes d'approximation d'intégrales (méthode des trapèzes, de Simpson...), mais en contrepartie, elle ne dépend pas de la régularité de la fonction à intégrer, et ne dépend que faiblement de la dimension (si on calcule une intégrale en dimension d, le nombre n de tirages à faire ne sera pas modifié, seul σ risque d'augmenter). Les méthodes de Monte-Carlo sont donc essentiellement utilisées pour calculer des intégrales multiples.

On aura donc intérêt à réduire le plus possible la variance σ^2, d'où de nombreuses méthodes dites de "réduction de la variance" (variables antithétiques, échantillonnage préférentiel... voir exercice 2 ci-dessous et [Tou99, Chap.4]).

2 Exercices

Exercice 1 *Approximation de π.* On veut approcher la valeur de π en utilisant une méthode de Monte-Carlo à partir de l'une des 3 intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_0^1 4\sqrt{1-x^2}dx, \quad I_2 = \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{1}_{x_1^2+x_2^2\leq 1} dx_1 dx_2, \quad I_3 = \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{1}_{x_1^2+x_2^2+x_3^2\leq 1} dx_1 dx_2 dx_3.$$

1. Que représentent géométriquement ces intégrales ? Rappeler leurs valeurs, et les interpréter en terme d'espérance.
2. Écrire trois fonctions Scilab qui retournent les approximations de π par méthode de Monte-Carlo, appliquée au calcul de chacune des trois intégrales.
3. Pour la première intégrale, calculer N tel que, avec N variables uniformes, on obtienne une bonne approximation de π à 10^{-2} près avec 95% de chances.
4. Illustrer la convergence des trois méthodes.

Exercice 2 *Réduction de la variance par méthode des variables antithétiques.* Supposons que l'on souhaite approcher par méthode de Monte-Carlo l'intégrale $I = \int_0^1 f(x)dx$ pour une certaine fonction f. Disposant d'une variable X de loi $\mathcal{U}_{[0;1]}$, on a $I = \mathbb{E}[f(X)]$. La précision de la méthode dépend de la variance de la variable $f(X)$ (voir Section 4.2.3 (c) du polycopié de cours). Une méthode dite de "réduction de variance" est donnée ci-dessous.

1. Justifier que $I = \mathbb{E}\left[\frac{1}{2}\left(f(X) + f(1-X)\right)\right]$. On peut donc appliquer une méthode de Monte-Carlo, soit avec $f(X)$, soit avec $g(X) = (f(X) + f(1-X))/2$.
2. Comparer les variances de $f(X)$ et $g(X)$.
3. Application. On prend $f(x) = \exp(x)$. Utiliser Scilab pour comparer les deux méthodes : on pourra calculer, pour un nombre de variables dans l'échantillon utilisé fixé, l'erreur entre la valeur exacte de l'intégrale et sa valeur approchée par chacune des méthodes.

Exercice 3 *Intervalles de confiance asymptotiques.* On cherche à construire différents intervalles de confiance asymptotiques pour le paramètre $\lambda > 0$ d'une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$, à partir d'une suite de variables aléatoires *i.i.d.* selon cette loi, puis à évaluer le niveau exact de ces intervalles par méthode de Monte-Carlo. On note $\overline{X}_n$ la moyenne empirique des n premières variables $\{X_1, \ldots, X_n\}$.

1. Justifier la convergence en loi suivante :

$$\sqrt{n}\left(\overline{X}_n - \lambda\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} Z_\lambda \sim \mathcal{N}(0, \lambda).$$

   Que donne l'application du Lemme de Slutzky si l'on divise le premier membre de la convergence ci-dessus par $\sqrt{\overline{X}_n}$? En déduire un premier intervalle de confiance asymptotique $\hat{I}_{n,1}(\alpha)$ au niveau $1 - \alpha$ pour λ.

2. Justifier, en utilisant à nouveau le Théorème Central limite et le Lemme de Slutzky, la convergence en loi suivante :

$$2\sqrt{n}\left(\sqrt{\overline{X}_n} - \sqrt{\lambda}\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} N \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

   En déduire un second intervalle de confiance asymptotique $\hat{I}_{n,2}(\alpha)$ pour λ.

3. Utiliser Scilab pour comparer le niveau de ces intervalles de confiance à différents rangs n fixés. On approchera pour cela $\mathbb{P}(\lambda \in \hat{I}_{n,l}(\alpha))$ $(l = 1, 2)$, par méthode de Monte-Carlo.

Références

[RS09] Vincent Rivoirard et Gilles Stoltz : *Statistique en action.* Cassini, 2009.

[Tou99] Paul Toulouse : *Thèmes de probabilités et statistique (Agrégation de mathématiques).* Dunod, 1999.